

8) Δείξτε ότι κάθε στοιχείο της \mathbb{Q}/\mathbb{Z} έχει περασμένη τάξη.

$$8) \mathbb{Q}/\mathbb{Z} = \{x + \mathbb{Z} / x \in \mathbb{Q}\}$$

αρα $x = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$ και $n \neq 0$

Εστω λοιπόν το στοιχείο

$$x + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \Rightarrow \frac{m}{n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

Τότε, για να είναι το $\frac{m}{n} + \mathbb{Z}$ πεπερασμένη τάξης θα πρέπει να $\exists k \in \mathbb{N}$ k φορές το $\frac{m}{n} + \mathbb{Z}$ να μας δίνει συν ομάδα \mathbb{Z} .

Εστω αυτό το $k = n$: (ετσι παίρνουμε

$$n \left(\frac{m}{n} + \mathbb{Z} \right) = m + n\mathbb{Z} \stackrel{n \in \mathbb{Z}}{=} m + \mathbb{Z} \stackrel{m \in \mathbb{Z}}{=} \mathbb{Z}$$

Συνεπώς, $o\left(\frac{m}{n} + \mathbb{Z}\right) < \infty$

Αρα, κάθε στοιχείο του \mathbb{Q}/\mathbb{Z} έχει πεπερασμένη τάξη